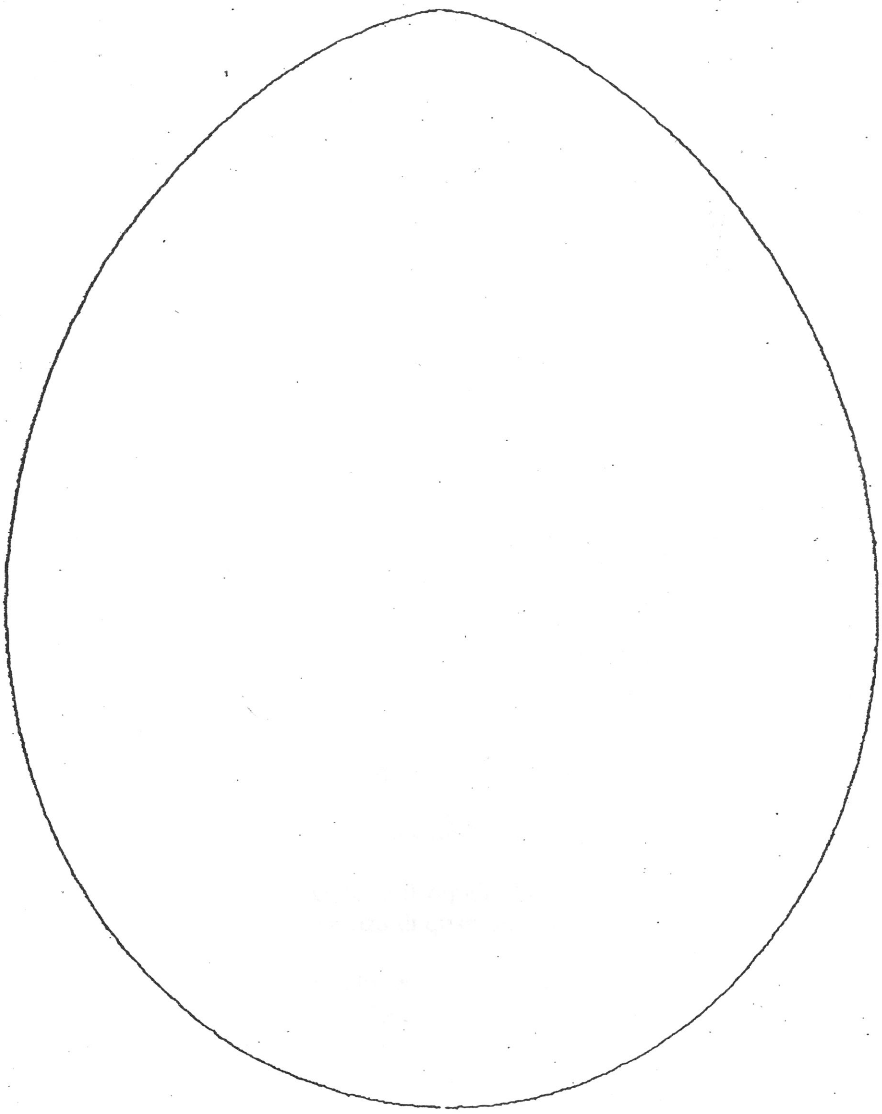
LUCIANO BUGGIO

L'UOVO



Estratto da "L'UOVO"- Maggio 1998

MATERIALI DIDATTICI DELLA SCUOLA DI FISICA
"GIORDANO BRUNO"
S.POLO 2423 - VENEZIA -

Agosto 1998

PREFAZIONE

La matematica e la geometria usano simboli per rappresentare relazioni rispettivamente numeriche e spaziali.
L'uso di espressioni del tipo "cerchio", "ellisse", "catenaria" ecc. è indotto dalla necessità di un altro tipo di "comprensione", e di comunicazione, che a queste discipline, in senso stretto e proprio, non appartiene.
Quindi è solo per qualche altra affezione dello spirito che l'oggetto del presente saggio, che è di geometria e di matematica, viene chiamato "Uovo".

Il Matematico ed il Geometra sono funzioni specifiche di un essere dotato anche di altre funzioni, in quanto non solo raziocinante, ma anche calato in un "mondo esterno" del quale percepisce oggetti che gli richiamano immediatamente quelli prodotti autonomamente, o comunque ad un dato momento esistenti in modo indipendente nella sua mente.

Rappresentata graficamente la funzione polare $r = \text{sen}^2 t$ non potete infatti fare a meno di pensare: "Perbacco, ma questo sembra un uovo!"

Da qui il nome.

Affermare poi che le galline ed i serpenti fabbricano le uova col programma $\text{sen}^2 t$ è altra cosa, che andrebbe approfondita.

Per esempio.
Il confronto con l'uovo della realtà ci fa rilevare a sfavore di essa la mancanza della "punta" nel polo maggiore, punta che risulta nell'algoritmo e che viene evidenziata dall'andamento dell'evoluta.
Sennonché tale punta avrebbe piena giustificazione nella realtà della fisiologia e dell'anatomia della gestazione e del parto, nonché della fecondazione.

Poniamo che in quanto contenitore dell'embrione, l'uovo debba essere sferico, dacché la sfera risolve il problema del minimo ingombro a fronte della massima capacità, fatta salva una qualche particolare struttura del contenuto. In quanto però l'uovo debba essere anche espulso dal "contenitore" gallina, o quel che è, per minimizzare il dolore della partoriente dovrebbe essere almeno da una parte affusolato, "appuntito". UO

Questa forma, però, al di là del fatto di essere in contraddizione con l'altra esigenza, quella dell'economia dello spazio, creerebbe problemi in fase di gestazione: la "punta" eserciterebbe una pressione maggiore contro la parete dell'utero, lo "bucherebbe".

Insomma l'uovo reale è uno strano oggetto che nello stesso tempo non deve avere una punta e deve averla.

L'oggetto teorico definito in questo saggio pare paradossalmente avere proprio questa caratteristica: *la punta c'è e non c'è.*
C'è sicuramente, dal momento che nel polo maggiore il raggio di curvatura è nullo, quindi la curvatura è "infinita", come avviene nelle punte; non c'è, poiché a differenza di quanto avviene in una punta la tangente è una sola.

Se osservate però un uovo reale, che per tutti gli altri aspetti sembra identico all'oggetto matematico, la curvatura al polo maggiore non vi appare così accentuata da configurare una punta.

Forse le galline non sono capaci di copiare bene il programma?

Abbiamo accennato anche alla fecondazione.
Come mi fa osservare il dott. Vaccari, nel polo maggiore ed in un suo piccolo intorno la tensione superficiale richiesta per equilibrare una data pressione, anche elevata, è molto piccola rispetto alla restante superficie relativamente piatta, proprio in forza della legge (formulata dal Marchese di Laplace) secondo cui minore è il raggio di curvatura di una membrana di separazione tra due stati diversi di pressione, minore è la sua tensione: ma questo permette allo spessore della membrana di essere sottile, tanto da configurare una barriera più permeabile allo scambio di materiali, per esempio alla penetrazione dello spermio o di sostanze nutritive.
Al limite della curvatura infinita con raggio nullo ci si può permettere un buco, seppure di raggio nullo, che non compromette la conservazione della forma.

Mi rendo conto che simili discorsi, che non fanno mistero della pretesa di attribuire un progetto agli oggetti della realtà, suonano giurassici agli uomini del Novecento.

Se mai nel corso della Storia del suo Pensiero l'Uomo ha veramente creduto nell'idoneità della Geometria a fornire modelli d'interpretazione del Mondo Reale, è da dire che ben poco oggi è rimasto di tutto questo, nella mentalità e nella coscienza correnti.
Nel Secolo dell'Incertezza, dei Probabilismi e della Casualità, delle Indeterminazioni e delle Relatività in Fisica, dell'Opinabilità delle stesse Matematiche e Geometrie, diventate tante ed "Altre", della Rinuncia al Riduzionismo, delle Complessità e della Crisi di tutti i Valori, non si pensa più che la forma di una foglia, la struttura di un cristallo o la traiettoria delle particelle subatomiche siano descrivibili in termini di equazioni elementari.

L'Uovo merita un discorso a parte.

I matematici non se ne sono mai occupati, forse perché è sempre stato ritenuto troppo importante, oltre che "complesso", per essere costretto dentro la camicia di Nesso di un algoritmo, operazione, questa, quasi blasfema per un oggetto collocato alla base stessa della Vita per non dire del Cosmo.

Eppure ha un'equazione semplicissima, e geometricamente si costruisce in modo ancor più semplice.
Con tutto ciò, è straordinaria ed inesauribile la quantità di notevoli proprietà che questo oggetto matematico possiede.

Se il cerchio (con la sfera) rappresenta il tutto, ma anche il nulla, perché tutti i suoi punti si equivalgono, l'uovo, a fronte di tale staticità (nella sfera non succede niente) è il simbolo e l'archetipo del dinamismo e della molteplicità degli avvenimenti e delle loro relazioni.

I "Filosofi" Greci ritenevano che la Geometria fosse la Conoscenza per Eccellenza. Cartesio sosteneva che una vera conoscenza del mondo fisico deve consistere nella riduzione ad uno schema geometrico, e si vantava di essere riuscito in questa impresa.
Galileo amava dire che il Libro della Natura è scritto con caratteri che sono cerchi, triangoli, quadrati... , dando con ciò il via alla scienza moderna. Però l'elenco delle lettere di questo suo alfabeto appare alquanto incompleto: alcuni importantissimi simboli e lemmi né lui né i suoi epigoni sono riusciti a scoprire e decifrare.

Un modello matematico come la Cicloide, "la Bella Elena della Geometria", di cui l'uovo è figlio diretto, non è mai stato giustapposto ad alcun aspetto del mondo fisico, se non per sbaglio.

Decisamente non è stato ancora esplorato tutto l'esplorabile.

Il fatto è che la Geometria è morta, con la fine dell'Ottocento, per le ragioni dette sopra, soffocata dall'incombere dell'Etica dell'Opinabilità, probabilmente a sua volta indotta dall'indebita estensione di un Principio Democratico al Dominio, da sempre Totalitarista, delle Scienze Esatte.

Lo dimostra, che sia morta, il fatto che oggi non c'è una parola per indicare chi si occupa di Geometria: gli addetti alla Matematica si chiamano Matematici, gli addetti alla Fisica Fisici.
E gli addetti alla Geometria?
Una volta, basta leggere i libri scritti fino ai primi del nostro secolo, gli addetti alla Geometria si chiamavano Geometri.
Oggi la parola non indica qualcosa di veramente serio.
Il Geometra è oggi uno che nella migliore delle ipotesi si dedica a delle applicazioni, poiché il Corpo Teorico della corrispondente Disciplina si ritiene completo e già formato, non ha bisogno di cultori, e quindi del nome con cui chiamarli, ché tanto non risponderebbe nessuno.

Ecco quindi lo scopo di questo lavoro: indurre il sospetto che ci sia ancora molto da fare.

Luciano Buggio

Venezia. 28 Maggio 1998

L'UOVO

di Luciano Buggio

VENEZIA agosto 1998

San Polo 2423 30125 Venezia - tel 041 719890

*(area di studio: **GEOMETRIA**)*

I - DEFINIZIONE.

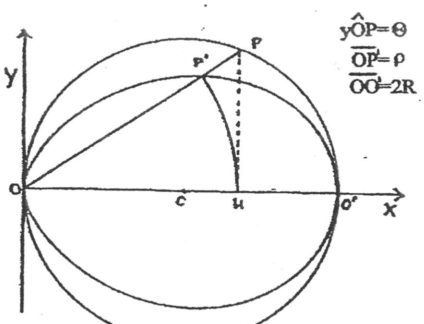


fig.1

Sia dato un cerchio di centro C e raggio R e siano O e O' gli estremi di un suo diametro. Tracciata per l'estremo O una qualunque corda OP, sia H la proiezione ortogonale di P sul diametro OO'.
Facendo centro in O, si tracci l'arco di circonferenza di raggio OH fino ad intersecare la corda OP nel punto P', per avere $\overline{OH} = \overline{OP'}$.
Si definisce "UOVO" il luogo dei punti P' che si ottengono nel modo indicato al muoversi del punto P lungo la circonferenza assegnata.

Le operazioni di proiezione ortogonale del punto P sul diametro OO' e di suo riporto col compasso sulla corda OP sono invertibili. Ne nasce un'altra definizione di UOVO.

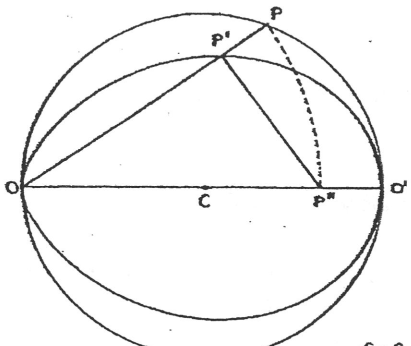


fig.2

Facendo centro in O, si tracci l'arco di circonferenza di raggio OP fino ad incontrare il diametro della circonferenza nel punto P", e da questo si tracci la perpendicolare alla corda fino ad incontrarla nel punto P'.
Dicesi UOVO il luogo geometrico dei punti P' che si ottengono nel modo indicato al muoversi del punto P lungo la circonferenza assegnata.

La corrispondenza tra i punti P della circonferenza, definita CERCHIO BASE, ed i punti P' dell'uovo ricavato è ***biunivoca*** come visibile dalla relazione geometrica tra i segmenti OP e OP' (*fig.1*):

$$\overline{OP'} = \overline{OP}\,\mathrm{sen}\,\Theta \qquad 0 \leq \Theta \leq \pi$$

avendo indicato con Θ l'angolo formato dalla retta OP con la sua posizione tangente al cerchio base in O (ossia quando $P \equiv O$).

Il diametro OO' del cerchio base viene definito ASSE MAGGIORE dell'uovo.

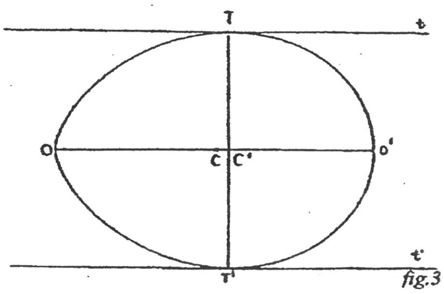


fig.3

Detti T e T' i punti di tangenza all'uovo delle due rette parallele t e t' all'asse maggiore, il segmento TT' viene definito ASSE MINORE ed il punto C' di intersezione dei due assi viene definito CENTRO ASSIALE. Come vedremo in seguito il centro assiale dell'uovo non coincide con il centro C del cerchio base, in particolare la distanza $\overline{OC'}$ è maggiore del raggio R.

Si definiscono, infine, POLO MAGGIORE e POLO MINORE dell'uovo i punti O e O' di tangenza (e quindi in comune) con il cerchio base, tra loro distinguibili per il fatto che in O l'uovo ha curvatura maggiore che in O'.

Passando dal piano allo spazio tridimensionale, definiamo UOVO SOLIDO, o UOVO DI ROTAZIONE, il solido ottenuto dalla rotazione di 180° dell'uovo intorno al suo asse maggiore.

Alla figura tridimensionale si possono estendere tutte le definizioni valide per l'uovo; si parlerà pertanto di SFERA BASE, di POLI MAGGIORE e MINORE, di ASSI, tre anziché due, di cui il MAGGIORE è asse di rotazione (e quindi di simmetria), e gli altri due ortogonali al primo e tra loro, MINORI, caratterizzati dall'avere uguale lunghezza.

II - EQUAZIONI DELL'UOVO.

II.1 - Equazione polare

Dato un uovo ed il suo cerchio base di centro C e raggio R, fissiamo un sistema di assi cartesiani x e y con:
- origine O coincidente con il polo maggiore;
- asse x coincidente con l'asse maggiore ed orientato nel senso polo maggiore-polo minore;
- asse y ortogonale ad x (e perciò tangente all'uovo in O) ed orientato in modo che la coppia xy sia *levogira*.

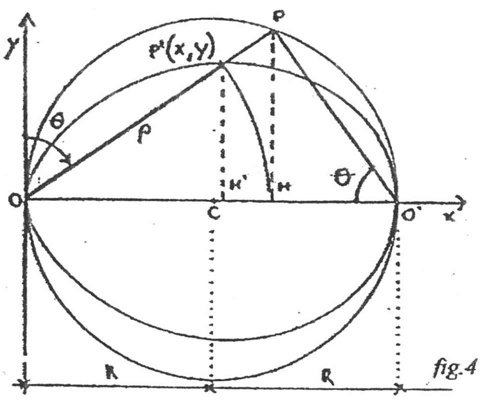


fig.4

Sia P'(x,y) un punto dell'uovo e P il suo corrispondente del cerchio base. Indichiamo con ρ la lunghezza della corda OP' e con Θ il suo azimut, misurato in radianti, rispetto all'asse y.
La posizione di P' è univocamente determinata se sono noti ρ e Θ.

Dalla definizione risulta: $\overline{OP'} = \overline{OP}\,\mathrm{sen}\,\Theta$

inoltre $\overline{OP} = \overline{OO'}\,\mathrm{sen}\,\Theta = 2R\,\mathrm{sen}\,\Theta$

pertanto, sostituendo, si ricava la relazione:

$$\boxed{\rho = 2R\,\mathrm{sen}^2\,\Theta}$$

che costituisce l'EQUAZIONE POLARE dell'uovo.

II.2 - Equazioni parametriche.

In molti casi può risultare molto utile disporre di un'EQUAZIONE PARAMETRICA, che si ottiene esprimendo le coordinate cartesiane (x,y) del generico punto P' dell'uovo in funzione dell'angolo Θ.

$$x = \overline{OH'} = \rho\,\mathrm{sen}\,\Theta = 2R\,\mathrm{sen}^3\,\Theta \qquad\qquad y = \overline{P'H'} = \rho\cos\Theta = 2R\,\mathrm{sen}^2\,\Theta\cos\Theta$$

da cui le EQUAZIONI PARAMETRICHE dell'uovo:

$$\begin{cases} x = 2R\,\mathrm{sen}^3\,\Theta \\ y = 2R\,\mathrm{sen}^2\,\Theta\cos\Theta \end{cases} \qquad\qquad 0 \le \Theta \le \pi$$

II-3 Equazione cartesiana dell'uovo.

Facendo riferimento alla figura 4, per la similitudine dei triangoli retttangoli OH'P' e OHP, per il Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo OH'P', e per il teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo OPO', le coordinate xy del generico punto punto P' dell'uovo soddisfano la relazione :

$$\boxed{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = 2R\,x^2}$$

che costituisce l'EQUAZIONE CARTESIANA dell'uovo.

III - CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DELL'UOVO.

Note le relazioni analitiche che consentono di esprimere la posizione dei punti dell'uovo nel piano cartesiano, passiamo a ricavare le sue principali caratteristiche geometriche.

III.1 - Coordinate del centro assiale.

Per definizione C' si trova sull'asse maggiore ed è la proiezione ortogonale di T, punto di contatto con l'uovo della retta t parallela all'asse x. Pertanto, per determinare l'azimut Θ_T del punto T, bisogna ricercare il *massimo* della funzione [dalle parametriche]: $\quad y(\Theta) = 2R\,\mathrm{sen}^2\,\Theta\cos\Theta \qquad 0 \le \Theta \le \frac{\pi}{2}$

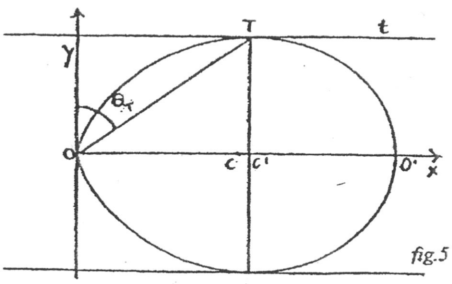


fig.5

risulterà
$$\begin{cases} \operatorname{sen}\Theta_T = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ \cos\Theta_T = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

e quindi, in base alle equazioni polare e parametriche si ha:

$$\rho_T = 2R\,\operatorname{sen}^2\Theta_T = \frac{4}{3}R = \overline{OT}$$

$$x_{c'} = 2R\,\operatorname{sen}^3\Theta_T = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R$$ Ascissa del centro assiale.

$$y_T = 2R\,\operatorname{sen}^2\Theta_T\cos\Theta_T = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}R$$ Ordinata del punto T e perciò semiasse minore.

Riassumendo, l'uovo possiede le seguenti peculiarità geometriche:

Asse maggiore $\overline{OO'} = 2R$ Asse minore $\boxed{\overline{TT'} = \frac{8}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}R}$ $\frac{\text{Asse M}}{\text{Asse m}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

III.2 - Area dell'uovo.

L'area dell'uovo si può calcolare analiticamente raddoppiando la semiarea ottenibile dall'integrale definito tra O e 2R della funzione y(x)

$$A = 2\int_0^{2R} y(x)dx$$ che, per le equazioni parametriche, diventa:

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(\Theta)dx(\Theta) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\,\operatorname{sen}^2\Theta\cos\Theta\frac{d2R\,\operatorname{sen}^3\Theta}{d\Theta}d\Theta$$ da cui $\boxed{A = \frac{3}{4}\pi R^2}$

L'area dell'uovo è quindi pari a 3/4 dell'area del cerchio base.

Si osserva inoltre che:

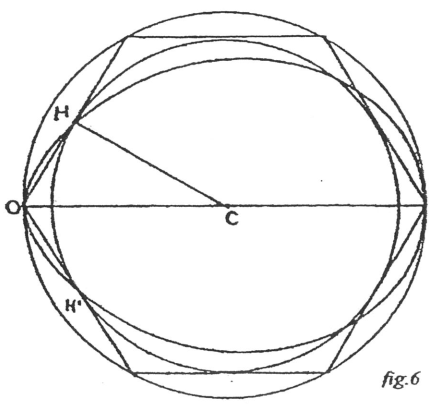


fig.6

1) - L'area dell'uovo è uguale all'area del cerchio iscritto nell'esagono a sua volta iscritto nel cerchio base.
Nelle condizioni dette, l'uovo interseca i due lati dell'esagono adiacenti al polo maggiore nei rispettivi punti medi, ove la circonferenza è tangente.

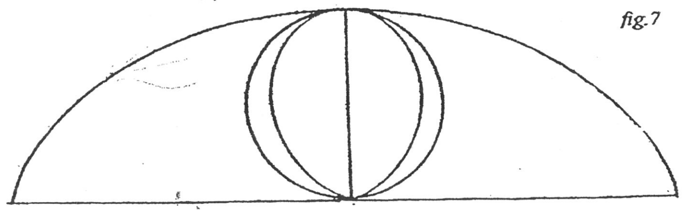


fig.7

2) - L'area dell'uovo è pari ad un quarto dell'area sottesa alla cicloide generata per rotolamento del cerchio base.

III.3 - Perimetro dell'uovo.

Il perimetro $\wp$ dell'uovo si può calcolare, a partire dalla equazione polare $\rho(\Theta) = 2R\,\operatorname{sen}^2\Theta$, sviluppando l'integrale:

$$\wp = \int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2(\Theta) + \left(\frac{d\rho}{d\Theta}\right)^2}\,d\Theta$$ da cui $\boxed{\wp = 2\left[2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]R}$

III.4 - Baricentro dell'uovo.

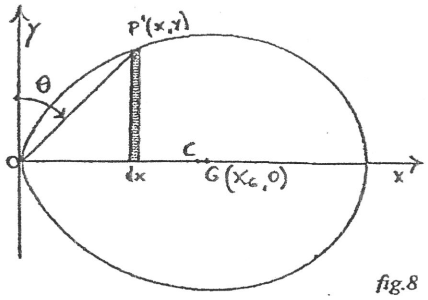


fig.8

Si determinano le coordinate cartesiane del baricentro G dell'uovo osservando, innanzitutto, che esso deve appartenere all'asse maggiore, in quanto asse di simmetria (ossia $y_G=0$), e sfruttando la seguente proprietà caratteristica.

Detta A l'area dell'uovo ed S_Y il suo momento statico rispetto all'asse y, si ha:

$$Ax_G = S_y = \int_0^{2R} yxdx \qquad x_G = \frac{2}{A}\int_0^{2R} yxdx$$

Esprimendo y e x attraverso le equazioni parametriche si avrà:

$$x_G = \frac{2}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R\,\mathrm{sen}^2\Theta\cos\Theta \cdot 2R\,\mathrm{sen}^3\Theta\, d\left(2R\,\mathrm{sen}^3\Theta\right)$$

Ricordando che $A = \frac{3}{4}\pi R^2$ riportiamo il risultato: $\boxed{x_G = \frac{1024}{315}\frac{R}{\pi}}$.

Il BARICENTRO dell'uovo non coincide con il centro assiale, nè con il centro del cerchio base, ma stà tra i due.

$x_c = R \qquad x_G \cong 1{,}035R \qquad x_{c'} \cong 1{,}089R$

IV - L'UOVO SOLIDO.

Premessa alla trattazione dettagliata dell'uovo tridimensionale (trattazione che non fa parte di questo lavoro) è l'esame di due suoi parametri fondamentali, il VOLUME e la SUPERFICIE LATERALE.

VIII.1 - Il volume dell'uovo solido.

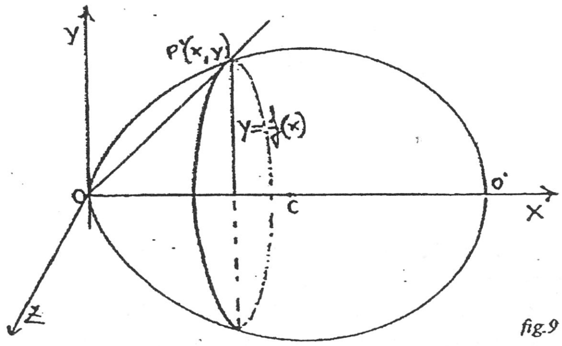


fig.9

Trattandosi di un solido di rotazione, il calcolo del volume può considerarsi con modalità semplificata eseguendo l'integrazione del generico cerchio, sezione trasversale dell'uovo solido, con un piano perpendicolare all'asse di rotazione x, nell'intervallo definito dall'asse maggiore [0, 2R].

Pertanto

$$V = \int_0^{2R} \pi f^2(x)dx = \pi\int_0^{2R} y^2\,dx$$

e, per le equazioni parametriche

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2R\,\mathrm{sen}^2\Theta\cos\Theta\right)^2 d\left(2R\,\mathrm{sen}^3\Theta\right)$$

risulterà: $\boxed{V = \frac{16}{21}\pi R^3}$

Poiché la SFERA BASE ha volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, si ricava che:

Il VOLUME DELL'UOVO SOLIDO E' PARI A $\frac{4}{7}$ DI QUELLO DELLA SFERA BASE.

VIII.2 - Superficie laterale dell'uovo solido.

Analogo discorso vale per il calcolo della SUPERFICIE LATERALE: si può effettuare per integrazione nell'intervallo [0,2R] della circonferenza trasversale dell'uovo solido con un piano perpendicolare all'asse di rotazione x.

$$\boxed{S_L = \frac{376}{135}\pi R^2}$$

V - PROPRIETÀ GEOMETRICHE PARTICOLARI DELL'UOVO.

V.1 - Teorema del cubo e del parallelepipedo.

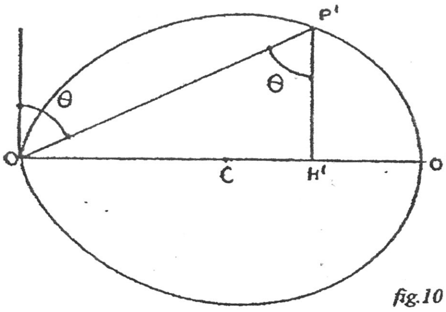


fig.10

$$\overline{OP'}^3 = \overline{OH'}^2 \cdot \overline{OO'}$$

Il cubo costruito sulla corda uscente dal polo maggiore è uguale al parallelepipedo che ha per base il quadrato della sua proiezione sull'asse maggiore, e per altezza l'asse maggiore stesso.

Questo teorema, che si deriva immediatamente anche dalle equazioni parametriche dell'uovo, è scritto espressamente nella sua equazione cartesiana, che riportiamo: $\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3} = 2Rx^2$

Nel primo membro è indicato il cubo di $\overline{OP'}$, dove $\overline{OP'}$ è espresso col teorema di Pitagora in funzione dei cateti del triangolo rettangolo OHP' (x e y nel riferimento cartesiano), nel secondo il prodotto del quadrato della proiezione $\overline{OH'}$ (x) per l'asse maggiore (2R), che dà il volume di un parallelepipedo a base quadrata di lato x ed altezza 2R.

V.2 - La duplicazione del cubo (Problema di Delo).

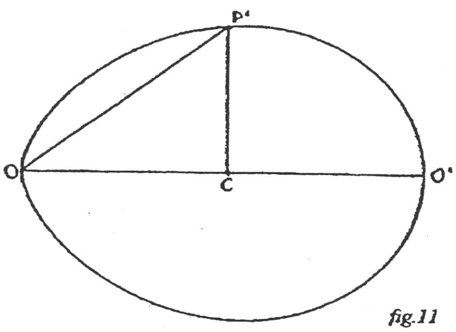


fig.11

Un corollario interessante deriva dell'applicazione del teorema al caso particolare in cui l'estremo P' della corda OP' si proietti ortogonalmente all'asse maggiore nel centro C del cerchio base.

$$\overline{OP'}^3 = \overline{OC}^2 \cdot 2\overline{OC} = 2\overline{OC}^3$$

Il cubo costruito sulla corda uscente dal polo maggiore e che ha per proiezione il semiasse maggiore è doppio di quello costruito sul semiasse stesso.

V.3 - Il dimezzamento del cubo.

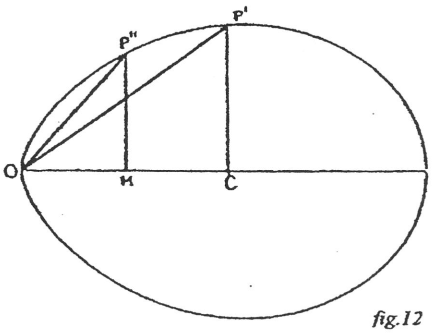


fig.12

Il problema inverso, quello del dimezzamento del cubo, si risolve a partire dalla metà (OH) del semiasse maggiore OC.

Si conduca la perpendicolare al punto medio del semiasse maggiore dell'uovo, dalla parte del polo maggiore. e si consideri uno dei due punti di intersezione di essa con l'uovo; *il cubo costruito sulla congiungente tale punto col polo maggiore ha volume che è la metà di quello del cubo costruito sul semiasse maggiore.*

$$\overline{OP''}^3 = \frac{1}{2}\overline{OC}^3$$

Osserviamo inoltre che:

1) - Il cubo costruito su OP' è quadruplo di quello costruito su OP" (ved. anche generalizzazione al seguente IV.4 - 2)
2) - Il semiasse maggiore dell'uovo è medio proporzionale tra le corde OP' e OP".

V.4 - Rapporti tra corde con proiezioni sull'asse maggiore successivamente dimezzate.

Ciascuna corda della detta sucessione (fig.13) sta con la precedente nel rapporto $\frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \operatorname{sen} P'\hat{O}C = \frac{\overline{P'C}}{\overline{P'O}}$ *(fig.11)*

$$\overline{OA_{n+1}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\overline{OA_n} \qquad \overline{OA_n} \text{ ennesima corda}$$

Ne consegue che:

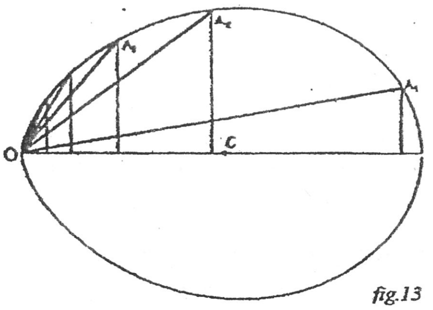


fig.13

1 - Data la successione delle corde dell'uovo uscenti dal polo maggiore ed aventi proiezione sull'asse maggiore successivamente dimezzata, il quadrato costruito su ciascuna di esse è uguale al rettangolo che ha per lati la precedente e la successiva. La misura di ciascuna è cioè media proporzionale tra quelle della precedente e della successiva.

$\overline{OA_n}^2 = \overline{OA_{n-1}} \cdot \overline{OA_{n+1}}$ $\qquad OA_n$ = ennesima corda

2) - I cubi costruiti sulle successive corde hanno ciascuno volume quadruplo rispetto al successivo .

$\overline{OA_n}^3 = 4\,\overline{OA_{n+1}}^3$ $\qquad \overline{OA_n}$ = ennesima corda

V.5 - **Teorema dei triangoli simili**

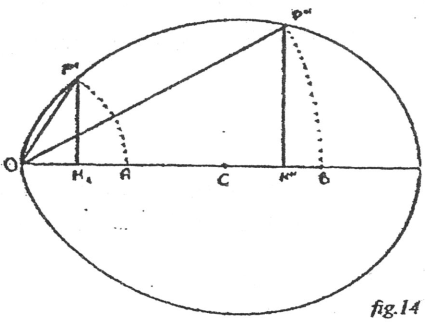


fig.14

Si considerino due punti A e B dell'asse maggiore alla stessa distanza dal punto medio C di esso, cioè simmetrici rispetto al centro, e si riportino, puntando il compasso nel polo maggiore O, sull'uovo rispettivamente in P' e P". Si proiettino P' e P" sull'asse maggiore, individuando H' e H" e quindi due triangoli rettangoli H'P'O e H"P"O.

I triangoli rettangoli così costruiti sono simili

Se $\overline{CA} = \overline{CB}$ allora $P'\hat{O}H' = O\hat{P}''H''$ (e quindi $O\hat{P}'H' = P''\hat{O}H''$)

La relazione si puo esprimere dicendo che l'azimut relativo a 0P' è complememtare dell'azimut relativo a 0P"

$$\Theta(P') = 90^0 - \Theta(P'')$$

Chiamato Θ l'angolo $P''\hat{O}A$ si avrà: $\qquad \overline{OP'} = 2R\,\mathrm{sen}^2\,\Theta \qquad \overline{OP''} = 2R\,\mathrm{sen}^2(90^\circ - \Theta) = 2R\cos^2\Theta$

Se ne ricava che:

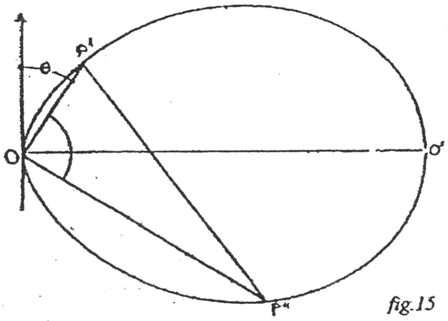


fig.15

1) - La somma delle misure di una coppia qualsiasi di corde dell'uovo condotte dal polo maggiore e perpendicolari tra loro è sempre costante ed uguale alla misura dell'asse maggiore.

$P'\hat{O}P'' = 90^\circ \qquad \overline{OP'} + \overline{OP''} = \overline{OO'} = 2R:$

Infatti $\qquad 2R\,\mathrm{sen}^2\,\Theta + 2R\cos^2\Theta = 2R(\mathrm{sen}^2\,\Theta + \cos^2\Theta) = 2R$

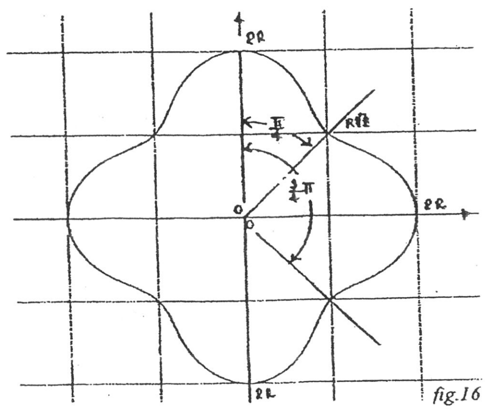


fig.16

2) - La funzione "ipotenusa" $P'P''(\Theta)$ per $0 \le \Theta \le \frac{\pi}{2}$ (e per $\frac{\pi}{2} \le \Theta \le \pi$ ecc.) è simmetrica rispetto a $\Theta = \frac{\pi}{4}$ (ed a $\Theta = \frac{3}{4}\pi$ ecc.), dove ha il minimo, che vale. $R\sqrt{2}$.

$$\rho = P'P''$$
$$\rho = 2R\sqrt{\mathrm{sen}^4\,\Theta + \cos^4\Theta}$$

V.6 - **Proporzionalità notevoli.**

a) - *Il triangolo rettangolo "1-2-3"*

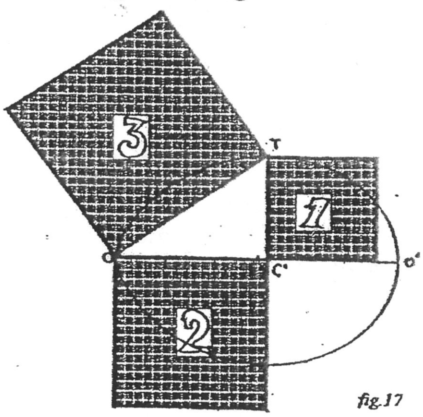


fig.17

$\overline{TC'}$ (semiasse minore) $= \dfrac{4}{3\sqrt{3}}R$

$\overline{OC'}$ (Distanza del centro assiale dal polo maggiore) $= \dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}R$

$\overline{OT}$ (Corda dal polo maggiore ad un estremo dell'asse minore) $= \dfrac{4}{3}R$

Risulta pertanto la seguente proporzione: $\overline{TC'} : \overline{OC'} : \overline{OT} = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$

E la sua conseguente: $\boxed{\overline{TC'}^2 : \overline{OC'}^2 : \overline{OT}^2 = 1:2:3}$

Il quadrato costruito su OT ha area tripla di quello costruito su TC'.
Il quadrato costruito su OC' ha area doppia di quello costruito su TC.'

Vale anche la relazione: $\overline{OT} = \dfrac{2}{3}\overline{OO'}$

Analogo triangolo si costruisce a partire dalla corda lunga $\dfrac{1}{3}\overline{OO'}$, in forza del teorema dei triangoli simili (V.5). In tale triangolo i valori lineari sono dimezzati, e quindi le aree ridotte a un quarto.

b) - *Uovo e Sezione Aurea.*

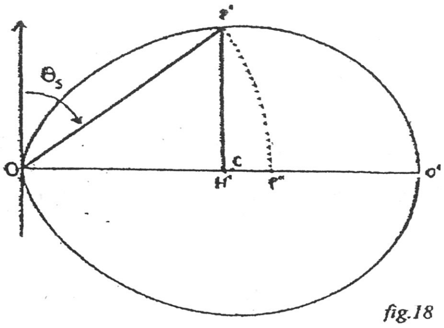


fig.18

1) - L'estremo P' della corda uscente dal polo maggiore, lunga come la sezione aurea dell'asse maggiore, dista da quest'ultimo come la sezione aurea della corda stessa.

essendo $\overline{OP'} = \overline{OP''} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{OO'}$ è anche $\overline{P'H'} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{OP'}$

Il quadrato costruito sulla corda in questione è quindi uguale al rettangolo avente per lati l'asse maggiore e la distanza da esso dell'estremo della corda.

$$\overline{OP'}^2 = \overline{OO'}\,\overline{H'P'}$$

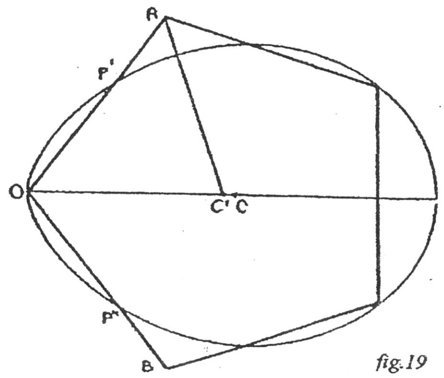


fig.19

2) - Il pentagono regolare avente un vertice nel polo maggiore e i due vertici non adiacenti al primo in comune con l'uovo ha i lati adiacenti che intersecano l'uovo nel proprio punto di sezione aurea.

$$\overline{OA} : \overline{OP'} = \overline{OP'} : \overline{AP'}$$

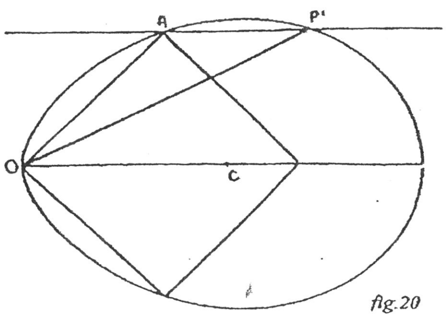


fig.20

3) - Costruito il quadrato, iscritto nell'uovo, con un vertice sul polo maggiore e tracciata per uno degli altri due vertici appartenenti all'uovo la parallela all'asse maggiore, questa intersecherà la curva in un altro punto.
Il raggio R del cerchio base è in rapporto aureo con la congiungente tale punto con il polo maggiore.

$$R = \overline{OC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{OP'} = \overline{OA} \quad \text{(vedi V.7 - b)}$$

c) - *Deduzione dall'uovo del I Teorema di Euclide.*

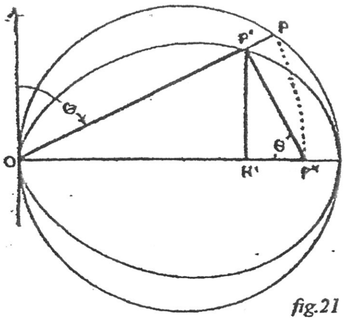


fig.21

Ricordando la seconda definizione data di Uovo (fig.2), cioè osservando che il triangolo OP'P" è, per costruzione, rettangolo, si ottiene l'identità.

$$\left(2R\,\text{sen}^2\Theta\right)^2 = 2R\,\text{sen}\Theta\; 2R\,\text{sen}^3\Theta \;\Rightarrow\; 4R^2\,\text{sen}^4\Theta = 4R^2\,\text{sen}^4\Theta$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\overline{OP'}^2 = \overline{OP''} \times \overline{OH'}$$

Il quadrato costruito sul cateto OP', corda dell'uovo condotta dal polo maggiore, è uguale al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa OP", riporto della corda corrispondente della sfera base, e la proiezione di OP' sull'ipotenusa stesso.

d) - *Deduzione dall'Uovo del Teorema di Pitagora.*

Facendo sempre riferimento alla figura precedente, per la similitudine dei triangoli rettangoli OH'P' e P'H'P" e per il II Teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo O P'P", ricorrendo alle equazioni paramentriche dell'uovo si ottiene, sviluppando, la relazione:

$2R\,\text{sen}^2\Theta\sqrt{1-\text{sen}^2\Theta} = 2R\,\text{sen}^2\Theta\cos\Theta$ da cui $\sqrt{1-\text{sen}^2\Theta} = \cos\Theta$ ovvero $\text{sen}^2\Theta + \cos^2\Theta = 1$

V.7 - L'uovo e i principali Poligoni regolari.

a) - *Il TRIANGOLO EQUILATERO.*

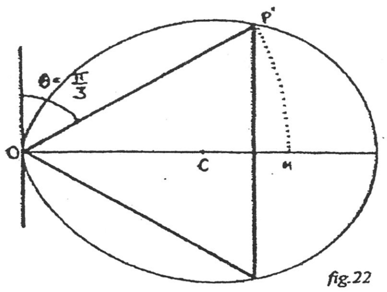


fig.22

1) - Il triangolo equilatero iscritto nell'uovo, avente l'altezza sull'asse maggiore ed il vertice relativo sul polo maggiore.

Dall'equazione polare, per $\Theta = \frac{\pi}{3}$ (60 gradi), si ha:

$$\overline{OP'} = 2R\,\text{sen}^2\Theta = 2R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2R\frac{3}{4} = \frac{3}{2}R$$

Il lato del suddetto triangolo è pari a 3/4 dell'asse maggiore (o 3/2 del semiasse).

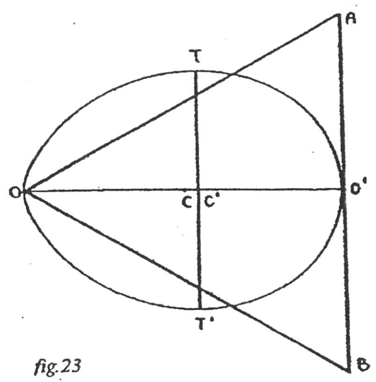


fig.23

2) - *Il triangolo equilatero avente per altezza l'asse maggiore dell'uovo.*

L'asse minore dell'uovo misura i $\frac{2}{3}$ del lato del triangolo equilatero avente per altezza l'asse maggiore.

$$\overline{TT'} = \frac{2}{3}\overline{OA}$$

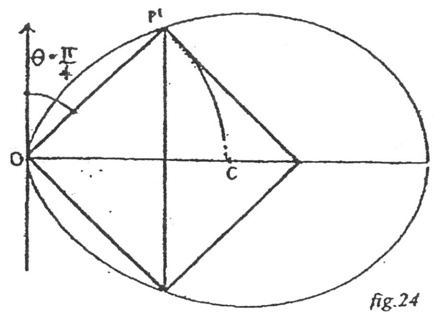


fig.24

b) - *Il QUADRATO, iscritto nell'uovo in modo da avere una diagonale sull'asse maggiore ed un vertice nel polo maggiore.*

Dalla equazione polare, per $\Theta = \frac{\pi}{4}$ si ha:

$$\overline{OP'} = 2R\,\text{sen}^2\Theta = 2R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2R\frac{1}{2} = R$$

Il lato di tale quadrato è uguale al semiasse maggiore (o al raggio R del cerchio base)

Osserviamo che a tale conclusione si arriva anche in base al teorema dei triangoli simili (V.5), essendo il rettangolo isoscele in coppia con se stesso in quanto termine di convergenza delle due serie.

c) - *Il PENTAGONO REGOLARE avente un vertice nel polo maggiore ed i due vertici non adiacenti al primo in comune con l'Uovo.* (ved. fig.19)

Come detto, il pentagono in questione ha i lati adiacenti al polo maggiore intersecati dall'uovo nel proprio punto di sezione aurea.

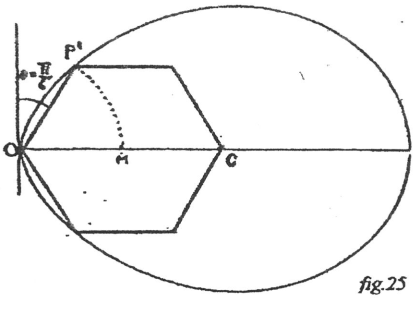


fig.25

d) - *L'ESAGONO REGOLARE, iscritto nell'uovo, avente una diagonale sull'asse maggiore ed un vertice coincidente col polo maggiore.*

Per $\Theta = \frac{\pi}{6}$, si ha: $\overline{OP'} = 2R \operatorname{sen}^2 \Theta = 2R\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2R\frac{1}{4} = \frac{R}{2}$

Il lato dell'esagono è pari ad $\frac{1}{4}$ dell'asse maggiore (o $\frac{1}{2}$ del semiasse).

Ciò risulta anche dal teorema dei triangoli simili (V.5): $\frac{1}{4}$ è simmetrico a $\frac{3}{4}$ rispetto ad $\frac{1}{2}$, quindi l'angolo $\frac{\pi}{6}$ è complementare dell'angolo $\frac{\pi}{3}$

Un'altra relazione tra uovo ed esagono è indicata in III.2 - 1. L'esagono maggiore in questione ha inoltre il lato uguale a quello del quadrato del punto b), essendo entrambi i lati in questione uguali ad R.

V.8 - Uovo e Cerchio Minore.

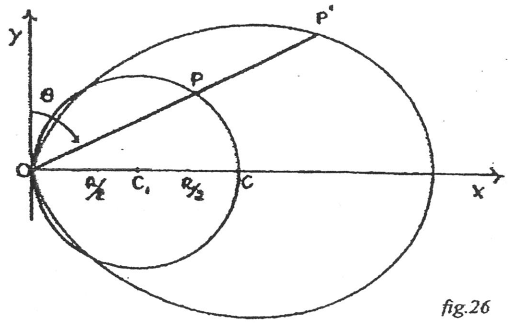


fig.26

Si definisce Cerchio Minore, per distinguerlo dal Cerchio Base, il cerchio tangente al polo maggiore dell'uovo, con diametro pari alla metà dell'asse maggiore e centro appartenente all'asse maggiore stesso.
Detto R il raggio del cerchio base e r il raggio del cerchio sopra definito, risulta che $r = \frac{R}{2}$. L'equazione polare dell'uovo e quella del cerchio minore possono rispettivamente scriversi:

$\overline{OP'} = 4r \operatorname{sen}^2 \Theta$ da cui risulta $\frac{\overline{OP'}}{r} = 4 \operatorname{sen}^2 \Theta$

$\overline{OP} = 2r \operatorname{sen}\Theta$ da cui risulta $\frac{\overline{OP}}{r} = 2 \operatorname{sen}\Theta$

si ricava: $\frac{\overline{OP'}}{r} = \left(\frac{\overline{OP}}{r}\right)^2$ Ora, poiché $0 \leq \overline{OP'} \leq 4r$ e quindi $0 \leq \frac{\overline{OP'}}{r} \leq 4$ risulta: $0 \leq \frac{\overline{OP}}{r} \leq 2$

In altri termini ciò significa che, *assumendo come unità di misura il raggio r del cerchio minore, l'uovo e il suo cerchio minore costituiscono un DIAGRAMMA POLARE IN SCALA "r" dei QUADRATI DEI NUMERI REALI OP compresi tra 0 e 2.*
Pertanto ogni raggio vettore $\overline{OP'}$, letto in scala "r", è il quadrato del segmento $\overline{OP}$ letto, anch'esso, in scala "r".

Come conseguenza: potendo individuare sull'uovo un punto P' tale che $\frac{\overline{OP'}}{r} = \pi$ *il segmento OP, misurato in scala "r", rappresenterebbe "IL LATO DEL QUADRATO DI AREA PARI A QUELLA DEL CERCHIO"* *(Quadratura del cerchio).*
Si tratta in pratica di individuare sull'uovo un punto P' avente distanza da O pari a πr. In tal modo il segmento OP risulterebbe lungo $r\sqrt{\pi}$, che è il lato del quadrato avente per area πr^2, la stessa del cerchio minore di raggio r.

Costruire con riga e compasso tale segmento OP' è impossibile: lo si può fare però ricorrendo al rotolamento della circonferenza, metodo che ha la stessa dignità di quello classicamente imposto, se è vero che con esso si definisce la cicloide.

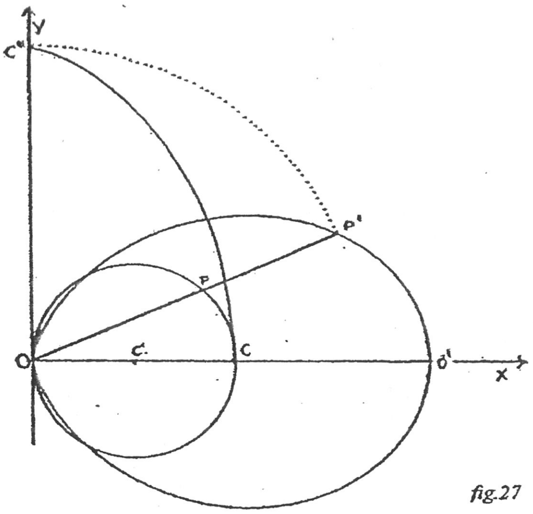


fig.27

Abbiamo fatto rotolare per mezzo giro sul semiasse positivo delle y la circonferenza minore. Il punto C, in quanto appartenente anche ad essa, avrà descritto intanto mezza cicloide, portandosi in C". Il segmento OC" è "mezza circonferenza rettificata" ed è lungo quindi πr. Rimessa la circonferenza dov'era prima del rotolamento, abbiamo puntato il compasso in O con apertura $\overline{OC''}$ e fatto ruotare tale distanza fino ad incontrare l'uovo nel punto P'. Quindi $\overline{OP'}$ vale πr.

Il quadrato di lato OP ha la stessa area del cerchio di raggio r.

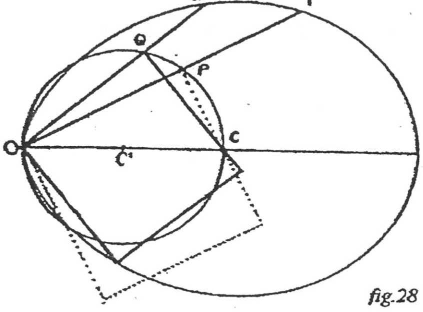


fig.28

Ricordando che l'area dell'uovo è 3/4 di quella del cerchio circoscritto, risulta che:

Il lato che quadra l'uovo è con il lato che quadra il cerchio base nel rapporto tra l'altezza ed il lato del triangolo equilatero.

$$\overline{OQ'}:\overline{OP'} = 3:4 \qquad \overline{OQ}:\overline{OP} = \sqrt{3}:2$$

(OQ è il lato che quadra l'uovo, non riprodotto in figura, inscritto nel cerchio minore, che è quadrato da OP)

VI - L'EVOLUTA DELL'UOVO

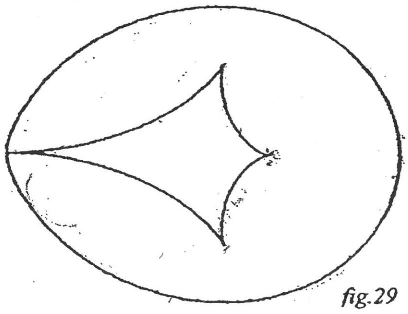


fig.29

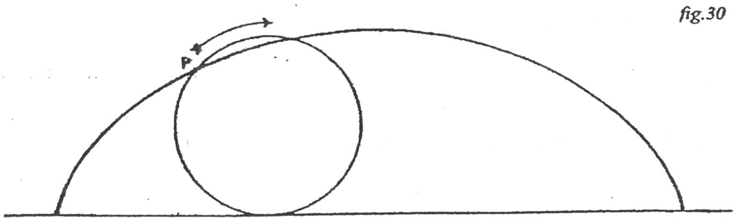
L'evoluta dell'uovo, luogo geometrico dei suoi centri di curvatura, ci rivela sorprendentemente che il polo maggiore ha raggio di curvatura nullo, come se lì ci fosse una punta.
Il raggio di curvatura del polo minore vale invece un terzo dell'asse maggiore.

VII - DALLA CICLOIDE ALL'UOVO.

Si può dare una definizione dell'uovo in termini di luogo geometrico anche a partire dalla cicloide.

La CICLOIDE è la curva descritta nel piano da un punto di una circonferenza che rotola su di una retta.

fig.30



Supponiamo adesso che il piano su cui giace la circonferenza, mentre la circonferenza avanza rotolando, ruoti intorno alla retta, e lo faccia ad una velocità angolare che sia la metà della velocità angolare del rotolamento, in modo che quando la circonferenza ha completato un rotolamento (cioè ha fatto un giro, e quindi il suo raggio R ha descritto un angolo di 360°) il piano abbia ruotato di 180° intorno alla retta.

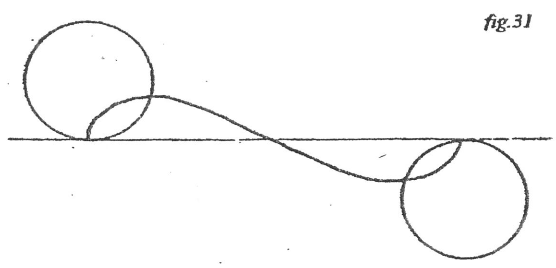


fig.31

In figura 31 le posizioni iniziale e finale della circonferenza, tra le quali è uscita dal piano del foglio: il punto considerato, che nella fig.32 ha tracciato la cicloide, qui ha tracciato nello spazio stereogeometrico una curva "in avvitamento", della quale in fig.31 è data la proiezione sul piano del foglio.
Con un secondo rotolamento, nel corso del quale il tracciato si svolge al di là del piano del foglio, si completa il ciclo, e la circonferenza ritorna alla posizione di partenza (fig.32).

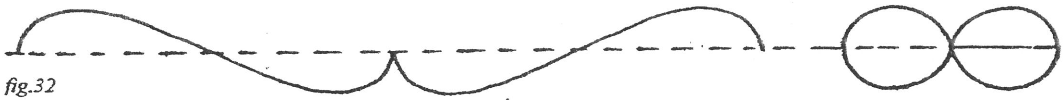


fig.32

LA PROIEZIONE ORTOGONALE DELLA CURVA STEREOGEOMETRICA SU DEFINITA SUL PIANO ORTOGONALE ALLA RETTA SU CUI LA CIRCONFERENZA ROTOLA E' L'UOVO.

Dimostrazione
Dotato il piano ortogonale di cui sopra di un riferimento polare (semiasse d'origine sul piano del foglio, diretto verso l'alto, con origine nel punto di intersezione con la retta e rotazione destrogira del vettore ρ) al variare dll'angolo $\Theta = \frac{\varphi}{2}$ da 0 a π (la mezza rotazione della circonferenza intorno alla retta su cui si compie il rotolamento) la proiezione su di esso del segmento AP sarà la variabile dipendente ρ dell'equazione polare.

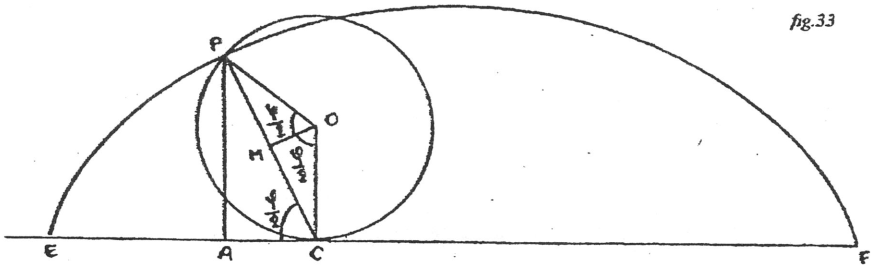


fig.33

$$\overline{AP} = \overline{PC}\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{2}$$

$$\overline{PC} = 2\overline{PM} = 2R\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{2}$$

$$\boxed{\overline{AP} = 2R\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2} = 2R\,\mathrm{sen}^2\Theta = \rho}$$

VIII - GENERALIZZAZIONE: LA FAMIGLIA DELLE "CICLEIDI".

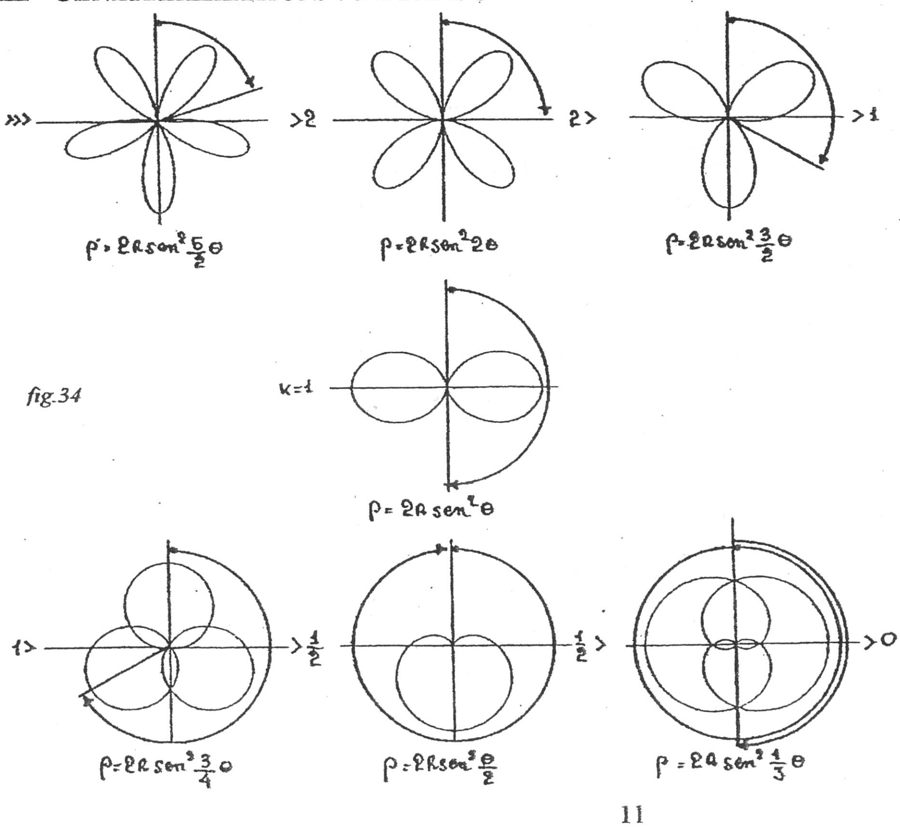


fig.34

1) - Definizione.

Se anziché mezza rotazione intorno alla retta su cui compie un rotolamento ("spazzando" un angolo di 180°) il piano su cui giace la circonferenza spazza un angolo qualsiasi $\frac{\pi}{k}$ (con k *reale positivo*), la proiezione ortogonale dell'estremo P traccerà una curva diversa. L'insieme delle curve (chiuse) così ottenute si definisce "Famiglia delle Cicleidi", cui oltre all'uovo (k=1), appartiene anche la Cardioide (k=1/2).
La loro equazione generale è

$$\boxed{\rho = 2R\,\mathrm{sen}^2 k\Theta} \qquad 0 \le \Theta \le \frac{\pi}{k}$$

La figura a lato illustra, per diversi valori *razionali* di k, alcuni membri della famiglia:

il rotolamento della circonferenza viene ripetuto finché il ciclo non si completa, riportando la circonferenza nella posizione di partenza.

Il numero $\frac{1}{2k}$ ridotto ai minimi termini della frazione, indica il rapporto tra numero di rotazioni e numero di rotolamenti necessari perchè si completi un intero ciclo.

Per esempio se $k=\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2k}=\frac{2}{3}$: il numeratore 2 significa che nel corso di un ciclo la circonferenza deve compiere due giri intorno alla retta, ed il denominatore 3 che deve rotolare tre volte. Il valore complessivo della frazione 2/3 significa invece che nel corso di ciascun rotolamento la circonferenza spazza intorno alla retta su cui rotola 2/3 di angolo giro (240°). Infatti $\frac{2}{3}\times 2\pi=\frac{\pi}{k}$, da cui $k=\frac{3}{4}$.

Se k è *irrazionale* non può essere espresso in termini di rapporto tra numeri interi: il ciclo non si completerà mai, poichè la rotazione è incommensurabile al rotolamento.

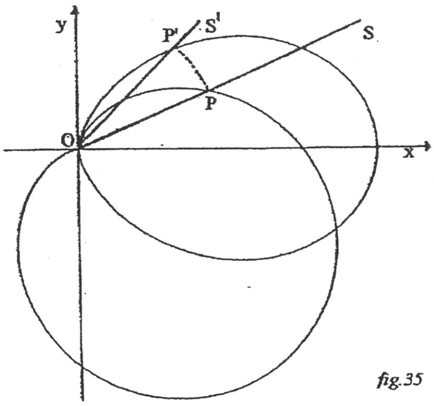


fig.35

2) - Intersezione tra Cicleidi: sezione n/m di un angolo.

Dato un angolo $y\hat{O}s$ nel riferimento xy si costruisce l'angolo $y\hat{O}s'=\frac{n}{m}y\hat{O}s$ nel modo seguente.

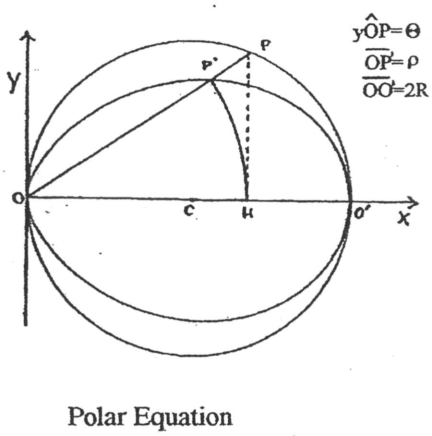
Disegnato l'uovo di equazione $\rho=2R\,\mathrm{sen}^2\Theta$ *e la cicleide di equazione* $\rho=2R\,\mathrm{sen}^2\frac{n}{m}\Theta$, *si consideri il punto P di intersezione della semiretta Os con la cicleide ,e , puntando il compasso in O, lo si riporti sull'uovo in P'. Si tracci quindi la semiretta Os' passante per P'. Quest'ultima divide l'angolo dato in due parti, di cui quella adiacente a y è la quota* $\frac{n}{m}$

$$\rho=2R\,\mathrm{sen}^2\frac{n}{m}\Theta \qquad \Theta_{s'}=\frac{n}{m}\Theta_s$$

ABSTRACT

The Egg

by Luciano Buggio S.Polo 2423 30125 Venezia



The properties of a new geometric locus are studied, defined as follows.

Given a circle with center C; O and O' are the extremities of its diameter. On the extreme O trace any chord OP, let H be the orthagonal projection of P on the diameter. Making the center at O, trace the arch of the circumference of ray OH until it intersects the chord OP at point P', so that we have OH=OP'.

One defines "EGG" ("UOVO") the place of the points P' that are obtained in the way indicated upon moving from point P along the assigned circumference.

Polar Equation	Parametric equation	Carthesian equation
$\rho=2R\,\mathrm{sen}^2\Theta$	$\begin{cases}x=2R\,\mathrm{sen}^3\Theta\\ y=2R\,\mathrm{sen}^2\Theta\cos\Theta\end{cases}$	$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3=2R\,x^2$

From this study notable relationships emerge among the internal elements of the curve, and between these and the most elementary geometric figures, in particular the fundamental regular polygons and the circle. Notable relationships because of their simplicity: all of the smallest integers, 7 included, usually foreign to algorithmic expressions, their square roots, the simplest fractions among these and their roots, the most elementary quadratic and cubic relationships, the golden section and π. Numerous new and interesting theorems are found and those of Euclid and Pythagoras are deduced independently. The classic problems of the Duplication of the Cube, the Squaring of the Circle and any section of the angle are resolved immediately and elegantly, with respect to the use of other transcendent curves.

TAV. 1

a : Vite di fissaggio del cursore b all'asta c per stabilire $\overline{AO}$ (semiasse maggiore).

d : Vite di fissaggio all'asta e del perno f per eguagliare $\overline{OC}$ ad $\overline{OA}$.

g : Cordicella inestendibile.

h : Molle traenti.

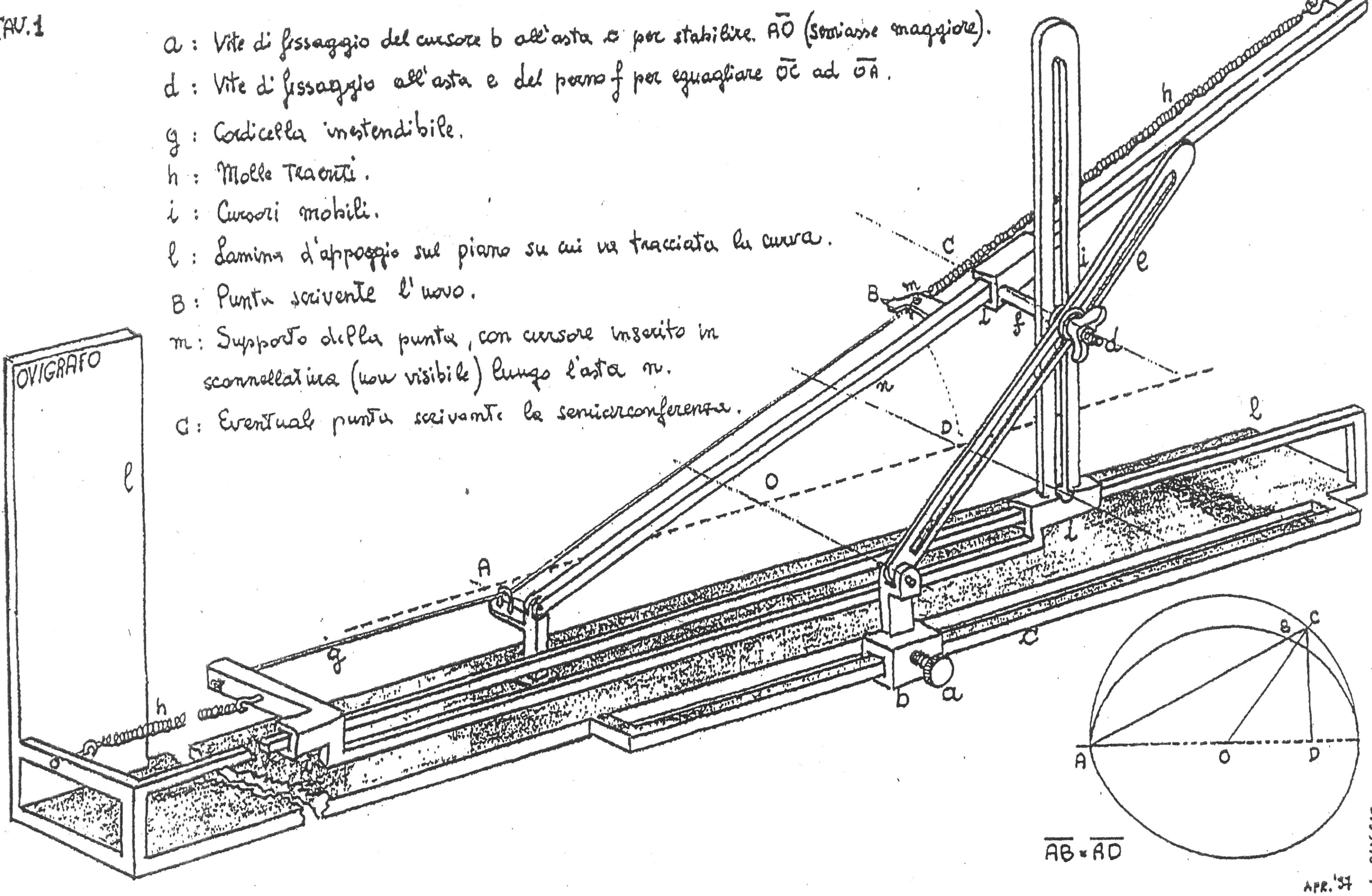
i : Cursori mobili.

l : Lamina d'appoggio sul piano su cui va tracciata la curva.

B : Punta scrivente l'uovo.

m : Supporto della punta, con cursore inserito in scannellatura (non visibile) lungo l'asta n.

C : Eventual punta scrivente la semicirconferenza.



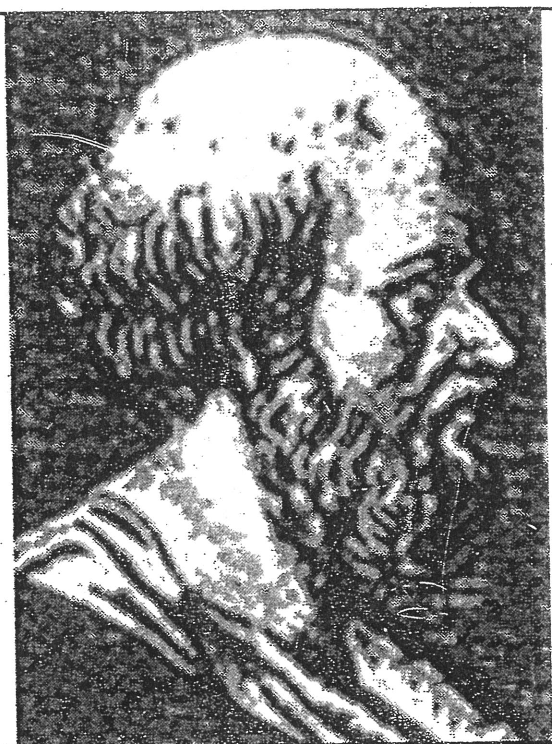
Serie VIII Volume 2 Numero 3 luglio - settembre 2002

Rivista trimestrale Sped. in abb. Postale comma 20/c art. 2 legge 622/96 CPR Teramo CPO

Periodico di matematiche

Organo della MATHESIS

Società italiana di scienze matematiche e fisiche
fondata nel 1895



All'interno:

Direttore:
Franco Eugeni

Direttore editoriale:
Antonio Maturo

Mathesis